TD-Cours n°1 – Binaire

1 Généralités

1. Écrire dans la base décimale les nombres suivants : 100, 1001010, 11100111.
   Les réponses sont 4, 74, 231.
2. Généraliser le procédé à $x_0x_1 \ldots x_{k-1}x_k$ une écriture binaire quelconque.
   Il suffit de calculer la somme suivante : $\sum_{i=0}^{k} x_i 2^i$.
3. On considère $x \in \mathbb{N}$. Comment déterminer le dernier chiffre de l'écriture binaire de x ? Formaliser l'opération correspondante.
   Si x est pair, c'et 0, sinon c'est 1. On est en train de calculer le reste de la division euclidienne de x par 2, ce qu'on notera $x\%2$ ("x modulo 2").
4. Généraliser : comment trouver l'avant dernier chiffre ? Les autres chiffres ?
   On rappelle que $x = \sum_{i=0}^{k} x_i 2^i$ avec $x_0, \ldots, x_k$ les chiffres qu'on recherche. On sait trouver x_0 grâce à la question précédente. On va donc chercher x_1.
   On considère le nombre $y = \frac{x - x_0}{2}$, les chiffres de son écriture en binaire son $y_0 = x_1$, ... $y_{k-1} = x_k$. Ainsi, en utilisant la question précédente, on peut trouver y_0, c'est à dire x_1.
   On itère cela pour tout les nombres de la forme $\frac{x}{2^i} - \sum_{j=0}^{i} \frac{x_j}{2^{i-j}}$, ce qui nous permet de trouver tous les x_i.

   Algorithme

   ```
   Definir y = x
   i = 0
   Tant que y != 0 :
     xi = y%2
     y = (y-xi)/2
     i=i+1
   Renvoyer les xi calculés
   ```

5. Quelle est l'écriture en binaire de 10, 879, 23456 ?
   Les réponses sont 1010, 1101101111 et 101101110100000.

2 Le binaire dans la machine

6. Écrire 68 sur 8 bits. Écrire 236 sur 8 bits. Peut on écrire 364 en binaire sur 8 bits ?
   Les réponses sont 01000100 et 11101100. Pour 364, ça ne peut pas marcher, le nombre le plus grand représentable avec 8 bits étant 255.

3 Opérations

Dans cette section, on fait des additions sur un nombre d'octets fixés (1, sauf en question 12)

7. Additionner 7 et 13 en binaire.

$$
\begin{array}{r}
1\,11 \\
111 \\
+ \quad 1101 \\
\hline
10100
\end{array}
$$

On appelle complément à 1 d'un nombre le nombre obtenu en inversant ses bits : les 0 deviennent des 1 et les 1 des 0. On notera $\bar{n}$ le complément à 1 d'un nombre binaire n.

8. Calculer le complément à 1 de 10010011.
   01101100.
9. On appelle complément à 2 le complément à 1 plus 1. Calculer le complément à 2 de 10010011. 01101101.

10. Combien vaut 10010011 additionné à son complément à 2 ?
    Ça fait 0.
11. Traduire en décimal 10010011 et le résultat de la question précédente. Que remarquez vous ?
    10010011 c'est 147. 01101101 c'est 109.
    On peut remarquer que le résultat de la question précédente c'est 0, comme si 109 agit comme -147 en binaire (On peut aussi remarquer $147 + 109 = 256 = 2^8$ (la plus petite puissance de 2 supérieure à 147), donc $109 \equiv -147[256]$.
12. Essayer de prouver ce que vous avez remarqué pour tout n. On va essayer de montrer qu'un nombre x dont l'écriture binaire est $x_n \dots x_0$ ajouté à son complément à 2 fait toujours 0.
    On va séparer deux cas qui influent sur le complément à deux (on définit $\bar{b} = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$) :
    - Si $x_0 = 1$, alors le complément à 2 de x est $\bar{x_n}\bar{x_{n-1}}\dots\bar{x_1}1$.
      On montre par récurrence sur i que le résultat de l'addition à l'indice i est 0 avec une retenue de 1.
      Pour $i = 0$, on a $1 + 1 = 0$ avec une retenue.
      Si à l'indice $i < n$ on a obtenu 0 et une retenue, alors à l'indice $i + 1$ on additionne $x_i + \bar{x_i} + 1$. Or $x_i + \bar{x_i} = 1$ et donc $x_i + \bar{x_i} + 1$ vaut 0 et on a une retenue de 1.
    - Sinon $x_0 = 0$, alors on note m le plus petit indice tel que x_m vaut 1. Le complément à 2 de x est $\bar{x_n}\bar{x_{n-1}}\dots\bar{x_{m+1}}10\dots0$.
      Quand on fait l'addition : aux indices entre 0 et $m - 1$ on additionne 0 avec 0, ça fait 0. À l'indice m on additionne 1 avec 1 ça fait 0 et une retenue. Aux indices supérieurs (par une petite récurrence), on additionne $x_i + \bar{x_i} + 1$ ce qui fait 0 avec une retenue.
13. En déduire une manière d'effectuer la soustraction en binaire.
    Pour faire $y - x$, on additionne y avec le complément à 2 de x.
14. Faire les additions et soustractions suivantes : 00011101 + 10000001, 01010101 - 00010010, 11100000 + 00111110, 01011010 - 01001111
    Résultats : 10011110 (29+129=158), 01000011 (85-18=67), 00011110 (224+52 = 286 raccourci en 30 par perte de retenue) et 00001011 (90-79=11)

4 Bonus : Hexadécimal

L'informatique utilise aussi l'hexadécimal, plus lisible pour un humain.

L'hexadécimal, comme le nom l'indique, c'est l'écriture dans la base 16. Il faut donc 16 chiffres pour l'écrire : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Les lettres A à F correspondent aux valeurs numériques 10 à 15.

15. Écrire dans la base décimale les nombres suivants : 34, 45A2, BF Les résultats sont 52, 17826 et 191.
16. Quelle est l'écriture en hexadécimal de 10, 879, 23456 ? A, 36F et 5BA0.
17. Vos procédés algorithmiques pour traduire vers, et depuis, le binaire peuvent-ils être adaptés ?
    Oui c'est la même chose sauf qu'on remplace 2 par 16.